# Lassen sich Quantenzustände als Ensembles streufreier Zustände darstellen? I*

W. Ochs

Sektion Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1546—1555 [1970]; eingegangen am 19. August 1970)

*Can quantum-states be considered as ensembles of dispersionfree states? I*

We consider the problem, whether quantum-states can be represented by Gibbsian ensembles of dispersionfree microstates having well defined values for all observables. Such a statistical representation is shown to be possible if and only if the concept and mathematical representation of observables is modified by abandoning the **1-1**-correspondance between observables and operators. A particular representation of quantum-states by Gibbsian ensembles is constructed.

## 1. Einleitung

In zwei früheren Arbeiten[2,3] haben wir die *Differentialraum-Quantentheorie* von Wiener und Siegel[4–7] (im folgenden mit DRQ abgekürzt) in vereinfachter Form dargestellt und auf ihre Konsistenz und Bedeutung hin untersucht.

Die DRQ ist als deterministische Ensembletheorie in Analogie zur statistischen Mechanik konzipiert: Ein physikalisches System im quantenmechanischen Zustand $W$ wird durch ein Ensemble virtueller Systeme dargestellt. Jedes virtuelle System entwickelt sich deterministisch und befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einem streufreien Mikrozustand, in dem jede Observable einen bestimmten Wert besitzt. Auf Grund einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ensembleelemente stimmen die Ensemblemittelwerte für alle Observablen mit den quantenmechanischen Erwartungswerten überein. Die Reduktion des Zustandsoperators im Meßprozeß wird von der DRQ auf eine Ensemblereduktion zurückgeführt, die dem Informationsgewinn durch die Messung entspricht, und deren Begründung im Rahmen einer Ensembletheorie keine Probleme aufwirft.

Unsere Untersuchung[3] der DRQ ergab nun entscheidende Widersprüche (1) zwischen den physikalischen Vorstellungen und dem mathematischen Formalismus der Theorie und (2) zwischen Quantenmechanik und DRQ in der Theorie des Meßprozesses; dadurch wird die DRQ physikalisch bedeutungslos. Andererseits ist die an der klassischen Physik orientierte Konzeption der DRQ so einfach und unproblematisch, daß eine konsistente Realisierung dieser Konzeption eine ernstzunehmende Alternative zur orthodoxen Interpretation der Quantentheorie darstellen könnte.

Unsere Analyse der DRQ führte daher zwangsläufig auf folgendes Problem: Läßt sich eine deterministische, ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie entwickeln, welche die physikalische Konzeption der DRQ verwirklicht, dabei aber deren Mängel vermeidet? Eine solche, zunächst nur hypothetische Theorie bezeichnen wir im folgenden mit EQT.

Die Untersuchung dieses Problems gliedert man zweckmäßig in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Frage, ob und in welcher Weise sich die Quantenzustände als Ensembles streufreier Mikrozustände auffassen lassen. Hierbei geht es also um die Möglichkeit einer „Ensembletheorie für einen festen Zeitpunkt", ohne Berücksichtigung der zeitlichen Änderung von Zuständen. Ist diese Frage positiv entschieden (läßt sich also zu jedem Zeitpunkt mindestens eine konsistente Ensembletheorie konstruieren), so behandelt der zweite Teil das Problem der zeitlichen Entwicklung von Ensembles. Dazu gehört sowohl die stetige, deterministische Entwicklung (zur Beschreibung der „objektiven" zeitlichen Änderung eines „unbeobachteten" Systems)

* Auszug aus der Dissertation des Autors[1].

1 Über die Möglichkeit einer konsistenten Wiener-Siegelschen Formulierung der Quantentheorie, Frankfurt am Main 1968.

Sonderdruckanforderungen an Dr. W. Ochs, Sekt. Physik Lehrstuhl Prof. Süßmann, *D-8000 München 13*, Schellingstraße 2—8.

2 W. Ochs, Helv. Phys. Acta, im Druck.

3 W. Ochs, Helv. Phys. Acta, im Druck.

4 N. Wiener u. A. Siegel, Phys. Rev. **91**, 1551 [1953].

5 N. Wiener u. A. Siegel, Nuov. Cim. Suppl. **2** (Ser. X) 982 [1955].

6 A. Siegel u. N. Wiener, Phys. Rev. **101**, 429 [1956].

7 A. Siegel, The Differential-Space Theory of Quantum Systems, in: Differential Space, Quantum Systems and Prediction, ed. by N. Wiener, Cambridge (Mass.) [1966].

als auch die unstetige, nichtdeterministische Ensemblereduktion (als Folge einer Messung).

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der erste Teil der angezeigten Untersuchung, i.e. das Problem der Darstellung von Quantenzuständen durch Ensembles streufreier Zustände.

In Kapitel 2 wiederholen wir zunächst die allgemeinen Annahmen der DRQ, soweit sie für die vorliegende Untersuchung relevant sind. Um die in der Ensemblekonstruktion der DRQ aufgetretenen Widersprüche in der EQT auszuschließen, muß die EQT einigen zusätzlichen Forderungen genügen. Diese zusätzlichen Forderungen widersprechen aber den (aus der DRQ übernommenen) allgemeinen Annahmen der EQT; daher muß mindestens eine dieser Annahmen oder Forderungen abgeschwächt werden. Wie in Kapitel 3 gezeigt wird, läßt sich eine hinreichende Abschwächung nur durch eine Änderung der Observablenkonzeption erreichen. Die Verträglichkeit der mit Hilfe einer neuen Observablenkonzeption abgeschwächten Forderungen an die EQT wird in Kapitel 4 durch Konstruktion eines geeigneten Modells bewiesen. In Teil II dieser Arbeit betrachten wir weitere Eigenschaften des EQT-Modells und untersuchen ihre Abhängigkeit voneinander und von den das Modell definierenden Eigenschaften.

## 2. Die allgemeinen Voraussetzungen der EQT

In diesem Kapitel wollen wir uns überlegen, welche allgemeinen physikalischen und mathematischen Forderungen an eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie gestellt werden müssen, um die physikalischen Vorstellungen der DRQ zu verwirklichen, dabei aber ihre Mängel zu vermeiden.

Dazu wiederholen wir zunächst die allgemeinen Annahmen der DRQ, soweit sie die physikalischen Vorstellungen dieser Theorie präzisieren, ohne ihre mathematische Struktur festzulegen. Da die vorliegende Arbeit die zeitunabhängige Problematik der EQT behandelt, können wir uns auf die entsprechenden Annahmen[8] der DRQ beschränken.

(**An 1**) Jedem physikalischen System ist ein komplexer, separabler Hilbert-Raum $\mathbf{H}$ zugeordnet, und es existiert eine bijektive[9] Abbildung $\sigma$ der Menge aller Observablen des Systems auf die Menge aller selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbf{H}$ mit diskretem[9] Spektrum; dabei erfüllt die Abbildung $\sigma$ die Bedingung $f[\sigma(\boldsymbol{A})] = \sigma[f(\boldsymbol{A})]$ für alle stückweise stetigen Funktionen $f$ und für alle Observablen $\boldsymbol{A}$.

(**An 2**) Jedes physikalische System befindet sich in einem Mikrozustand, in dem alle Observablen einen wohlbestimmten Wert besitzen; als Werte einer Observablen $\boldsymbol{A}$ kommen nur die Eigenwerte des zugeordneten Operators $\sigma(\boldsymbol{A}) = A$ in Frage. Jede Observable gestattet (im Prinzip) eine *ideale Messung*, die den unabhängig von jeder Messung vorliegenden „objektiven" Observablenwert feststellt.

(**An 3**) Die Gesamtheit aller Observablenwerte bestimmt bereits eindeutig den Mikrozustand des Systems. Um diesen Mikrozustand als Punkt in einem Zustandsraum darstellen zu können, definiert die EQT zu jeder Observablen $\boldsymbol{A} = \sigma^{-1}(A)$ eine surjektive Abbildung ${}^{0}A : \Omega \mapsto \mathbf{a} : = \mathrm{Spt}(A)$ eines geeigneten Raums $\Omega$ auf das Spektrum von $A$.

(**An 4**) Der experimentell präparierbare Makrozustand eines Systems enthält nur wenig Information über seinen Mikrozustand. Daher beschreibt die EQT einen Makrozustand durch ein Gibbssches Ensemble von Mikrozuständen im Zustandsraum des Systems und führt die (für den Makrozustand charakteristischen) Streuungen der Meßwerte auf die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ensembleelemente zurück.

(**An 5**) Es existiert eine bijektive Abbildung $\vartheta$ der Menge aller Makrozustände auf die Menge aller positiv semidefiniten, normierten, selbstadjungierten Operatoren $W$ aus $\mathbf{H}$, und der Erwartungswert $E(\boldsymbol{A})$ der Observablen $\boldsymbol{A} = \sigma^{-1}(A)$ im Makrozustand $\boldsymbol{W} = \vartheta^{-1}(W)$ genügt der Beziehung $E(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Sp}(WA)$.

Wie wir in [3] gezeigt haben, enthält die Realisierung dieser Annahmen in der DRQ zwei entscheidende Mängel: Erstens konstruiert die DRQ zu jedem Makrozustand einen eigenen Zustands-

[8] Die folgenden Annahmen stimmen zwar inhaltlich mit den Annahmen aus [2] überein; sie sind aber gekürzt und teilweise neu gruppiert.

[9] Die Bijektivität der Abbildung und ihre Einschränkung auf Operatoren mit diskretem Spektrum haben wir von der DRQ übernommen, um die Darstellung zu vereinfachen. Die Probleme der vorliegenden Arbeit wurden in [1] für Operatoren mit beliebigem Spektrum behandelt.

raum, so daß sich verschiedene Makrozustände nicht im selben Zustandsraum darstellen lassen. Der Zustandsraum repräsentiert daher nicht die physikalische Struktur des betrachteten Systems, sondern die kontingenten Eigenschaften des jeweiligen Makrozustands. Zweitens unterscheiden sich die Elemente des Zustandsraums der DRQ im funktionalen Zusammenhang ihrer Observablenwerte entscheidend von der Observablenstruktur physikalischer Objekte in der Quantentheorie, deren Observablenkonzeption aber von Wiener und Siegel übernommen wird. Daher lassen sich die Punkte der Differentialraumensembles nicht als ,,virtuelle Systeme in wohlbestimmten Mikrozuständen'' auffassen. In beiden Punkten verletzt die DRQ Grundvorstellungen jeder Ensembletheorie und *Theorie mit verborgenen Parametern.*

Um diese Mängel in der EQT auszuschließen, stellen wir einige zusätzliche Forderungen an die Theorie. Eine Trennung von Ensemble und Zustandsraum erreichen wir — in Analogie zur statistischen Mechanik — durch zwei weitere Annahmen:

**(An 6)** Die Observablenwertfunktionen ${}^0A$ der EQT hängen nicht vom jeweiligen Makrozustand des Systems ab.

Nur dann definieren die Observablenwertfunktionen nämlich einen Zustandsraum, der die physikalische Struktur des Systems (teilweise) charakterisiert und in dem die verschiedenen Makrozustände durch verschiedene Ensembles dargestellt werden können.

**(An 7)** Ein Makrozustand $\boldsymbol{W} = \vartheta^{-1}(W)$ wird durch eine Wahrscheinlichkeit $\mu_W$ auf einer $\sigma$-Algebra von Teilmengen des (vorher definierten) Zustandsraums dargestellt. Das Ensemblemittel der Observablenwertfunktionen mit dieser Wahrscheinlichkeit ergibt dann die in (An 5) geforderten Erwartungswerte

$$E_{\boldsymbol{W}}(A) = \int_{\Omega} {}^0A \, \mathrm{d}\mu_W = \mathrm{Sp}(WA) .$$

Um die Punkte des Zustandsraums als ,,virtuelle Bilder'' des realen Systems auffassen zu können, muß die in der Quantenmechanik gültige Observablenstruktur physikalischer Systeme auch für die Mikrozustände der EQT gelten. Eine Übereinstimmung der Observablenstrukturen liegt nach [3] genau dann vor, wenn die Observablenfunktionen folgende Forderung erfüllen:

**(An 8)** Die Observablenwertfunktionen ${}^0A$ genügen der Beziehung

$$f({}^0A) = {}^0f(A)$$

für alle stückweise stetigen Funktionen $f$.

Zur Veranschaulichung von (An 8) dient folgendes **Lemma (2.1).** Unter den Annahmen (An 1) bis (An 3) sind die beiden Aussagen

$$f({}^0A) = {}^0f(A) \tag{2.1}$$

und

$$A = \sum_{a \in \mathbf{a}} a\, P_a \Rightarrow {}^0A = \sum_{a \in \mathbf{a}} a\, {}^0P_a \tag{2.2}$$

äquivalent, und aus jeder von ihnen folgen die Beziehungen [10]

$${}^0P_a = \mathrm{Ch}\,\{x \mid {}^0A(x) = a\} = : \mathrm{Ch}(M_{P_a}) , \tag{2.3}$$

$$[A, B] = 0 \Rightarrow {}^0(A + B) = {}^0A + {}^0B , \tag{2.4}$$

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow {}^0A \cdot {}^0B = 0 , \tag{2.5}$$

$$R \leq S \Rightarrow {}^0R \leq {}^0S , \tag{2.6}$$

$$1 = \sum_{\mu} Q_\mu \Rightarrow 1 = \sum_{\mu} {}^0Q_\mu(x) . \tag{2.7}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes befindet sich im Anhang.

## 3. Entwicklung einer neuen Observablen-Konzeption

Mit den Annahmen (An 1) bis (An 8) haben wir alle Bedingungen zusammengestellt, denen die Ensemblekonstruktion der EQT nach unserer in [2] und [3] gegebenen Darstellung und Analyse der DRQ genügen sollte. Wie der folgende Satz von Bell [11] zeigt, sind diese Annahmen aber nicht verträglich.

**Satz 1:** Hat der Hilbert-Raum eines Systems mindestens drei Dimensionen, so sind die Annahmen (An 1) bis (An 3) und (An 8) unverträglich.

Obwohl Satz 1 eine entscheidende Aussage über die Struktur der EQT enthält, ist unser Problem damit noch nicht vollständig gelöst. Als ,,Unmöglichkeitsbeweis'' einer EQT können wir Satz 1 erst dann akzeptieren, wenn eine sorgfältige Diskussion seiner Voraussetzungen gezeigt hat, daß diese entweder aus den unverzichtbaren Vorstellungen jeder ,,DRQ-ähnlichen'' Ensembletheorie oder aus den

[10] Ch($M$) bedeutet die charakteristische Funktion der Menge $M$.

[11] J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 [1966].

interpretationsunabhängigen und durch die Erfahrung gesicherten Aussagen der Quantenmechanik folgen.

Zunächst scheinen die Annahmen (An 1) bis (An 3) genau eine Voraussetzung zu enthalten, die nach den obigen Kriterien nicht notwendig ist, nämlich die Annahme, daß jedem diskreten, selbstadjungierten Operator auch eine (sogar ideal meßbare) Observable entspricht. Diese Annahme ist nicht nur unplausibel, sondern für viele Systeme bekanntlich falsch[12]. Trotzdem ist dieser Punkt für unser Problem irrelevant; denn in Teil II dieser Arbeit werden wir zeigen, daß eine physikalisch plausible Abschwächung von (An 1) die Gültigkeit von Satz 1 nicht beeinträchtigt.

Bleibt noch (An 8); aber diese Annahme folgt bereits aus (An 1) bis (An 3) und folgender (interpretationsunabhängigen) Aussage der Quantenmechanik: „Die Observablen $\boldsymbol{A}$ und $f(\boldsymbol{A})$ lassen sich gemeinsam (und gegenseitig störungsfrei) messen[13] und bei einer gemeinsamen idealen Messung von $\boldsymbol{A}$ und $f(\boldsymbol{A})$ gilt stets

$$\text{Wert von } f(\boldsymbol{A}) = f(\text{Wert von } \boldsymbol{A})\text{''}. \tag{3.1}$$

Denn nach (An 2) stellt jede ideale Messung nur die bereits vor der Messung objektiv vorliegenden Observablenwerte fest; und wenn Gl. (3.1) in allen Quantenzuständen für beliebige Observablen gilt, so muß sie bereits vor der Messung für alle Observablen in allen Mikrozuständen gelten, und damit erhalten wir bereits (An 8).

Andererseits enthält (An 8) offensichtlich auch Aussagen über die Observablenstruktur von Mikrozuständen, die über die oben verwendete Aussage (3.1) der Quantenmechanik hinausgehen[14] und die weder durch Erfahrung noch durch physikalische Vorstellungen der DRQ gerechtfertigt werden: Betrachten wir die drei Zustandseigenschaften $\boldsymbol{P}_1 = \sigma^{-1}(P_1)$, $\boldsymbol{P}_2 = \sigma^{-1}(P_2)$ und $\boldsymbol{Q} = \sigma^{-1}(Q)$ mit $P_1 \cdot P_2 = 0$, $[Q, P_i] \neq 0$ $(i = 1{,}2)$, $0 < Q < P_1 + P_2 < 1$, so ergibt sich aus (An 8) und Lemma (2.1)

$$^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0 \Rightarrow 0 = {}^0(P_1 + P_2)(x) \geq {}^0Q(x). \tag{3.2}$$

Obwohl $P_1$, $P_2$ und $Q$ nicht kommutieren und daher $P_1$, $P_2$ und $Q$ nicht gemeinsam gemessen werden können, fordert (An 8) für alle Mikrozustände einen ganz speziellen Zusammenhang zwischen ihren Observablenwerten[15]. Und wie der Beweis von Satz 1 zeigt, ist es gerade dieser Zusammenhang, der zum Widerspruch führt.

Unsere Überlegungen führen damit zu folgendem Ergebnis:

1. (An 8) geht in ihren Forderungen an die Observablenstruktur der Mikrozustände weit über die Aussagen der Quantenmechanik hinaus; da die physikalischen Vorstellungen der EQT aber keine Bedingungen an die Observablenstruktur enthalten, kann (An 8) vom Standpunkt der EQT aus abgeschwächt werden.

2. Andererseits folgt (An 8) bereits aus (An 1) bis (An 3) und der Generalvoraussetzung von DRQ und EQT über die Gültigkeit (der interpretationsunabhängigen Aussagen) der Quantentheorie. Folglich kann (An 8) nur in Verbindung mit (An 1) bis (An 3) abgeschwächt werden.

Wenn wir (An 1) bis (An 3) abschwächen wollen, ohne dabei eine Grundidee der EQT aufzugeben, müssen wir zunächst die dort „versteckte“ Voraussetzung finden, aus der (An 8) folgt und die über die Vorstellungen der EQT hinausgeht. Eine eingehende Diskussion der Schlußkette in Gl. (3.2) ergibt nun, daß die gesuchte Voraussetzung mit der eineindeutigen Zuordnung von Observablen und Operatoren zusammenhängt: Wie wir gesehen haben, folgt aus (An 1) bis (An 3) und Gl. (3.1) bereits (An 8) und damit auch die Gleichung

$$(\forall x)\,(A = \sum_{a \in \mathfrak{a}} a\, P_a \Rightarrow {}^0A(x) = \sum_{a \in \mathfrak{a}} a\, {}^0P_a(x)). \tag{3.3}$$

Diese Beziehung besagt, daß der Observablenwert $^0P_a(x)$ nicht davon abhängt, in welchem Operator der Projektionsoperator $P_a$ als orthogonaler Sum-

[12] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, Phys. Rev. 88, 101 [1952].

[13] Diese Aussage ist im Rahmen der Quantentheorie trivial, da man $\boldsymbol{A}$ und $f(\boldsymbol{A})$ durch dieselbe Messung erhält und den $f(\boldsymbol{A})$-Wert aus dem $\boldsymbol{A}$-Wert nach Gl. (3.1) berechnet.

[14] Auf diese Tatsache hat schon Bell[11] hingewiesen.

[15] Man muß hier unterscheiden zwischen dem Mikrozustand $x_v$ vor der Messung und dem Mikrozustand $x_n$ nach der Messung. Hat die Messung $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2 = 0$ ergeben, so legt der Makrozustand nach der Messung den Wert $\boldsymbol{Q} = 0$ mit Sicherheit fest, und folglich gilt für alle Mikrozustände nach der Messung $^0Q(x_n) = 0$. Wären aber die Observablen $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ und $\boldsymbol{Q}$ in dem Makrozustand vor der Messung unscharf, so gibt es (im Rahmen der EQT) kein zwingendes Argument gegen die Annahme $^0P_1(x_v) = {}^0P_2(x_v) = 0$, $^0Q(x_v) = 1$. Denn experimentell ist diese Annahme nicht prüfbar (unabhängig von der Frage, ob die Werte $^0P_1(x_v)$, $^0P_2(x_v)$ und $^0Q(x_v)$ überhaupt existieren), da die drei Observablen nicht gemeinsam gemessen werden können.

mand auftritt; und das bedeutet physikalisch, daß die Messung einer Observablen $\boldsymbol{A}$ im Zustand $x$ stets den gleichen Wert ergibt, unabhängig davon, welche anderen Observablen gleichzeitig gemessen werden. Diese Konsequenz der eineindeutigen Zuordnung von Observablen und Operatoren führt aber gerade zu den experimentell unprüfbaren und „unerwünschten“ Aussagen von (An 8) über die Observablenstruktur von Mikrozuständen. Um (An 8) geeignet abschwächen zu können, müssen wir daher zulassen, daß der Wert einer Zustandseigenschaft $\boldsymbol{P}$ *auch* davon abhängt, welche anderen Zustandseigenschaften gemeinsam mit $\boldsymbol{P}$ gemessen werden. Diese Vorstellung steht aber offensichtlich in Widerspruch zu (An 2), solange wir an der Observablenkonzeption der Quantentheorie festhalten, wonach eine Observable — unabhängig von der Meßanordnung — stets durch denselben Operator dargestellt wird.

Für eine geeignete Abschwächung von (An 1) bis (An 3) müssen wir daher Konzeption und mathematische Darstellung der Observablen ändern. Wie diese Änderung aussehen kann, wollen wir uns am Beispiel der Ortsmessung atomarer Teilchen überlegen. Als Observable treten hier die Zustandseigenschaften „Das Objekt wird im Raumelement[16] $\mathscr{P}$ festgestellt“ auf [17]. Wir betrachten wieder die drei Zustandseigenschaften $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ und $\boldsymbol{Q}$, deren zugeordnete Operatoren den Beziehungen

$$P_1 \cdot P_2 = 0, \quad [P_i, Q] \neq 0, \quad 0 < Q < P_1 + P_2 < 1$$

genügen. Gegeben sei ein Teilchen im Mikrozustand $x$; durch Messungen wissen wir ${}^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0$. Was folgt daraus für den Wert ${}^0Q(x)$? Die Quantentheorie kann keine definitive Antwort geben, da (1) im Rahmen der orthodoxen Quantenmechanik eine Observable ohne vorangegangene Messung gar keinen Wert besitzt und (2) bei einer Messung von $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{P}_2$ die Observable $\boldsymbol{Q}$ nicht mitgemessen wird. Da auch die physikalischen Vorstellungen der EQT keine (über die Erfahrung hinausgehenden) Zusammenhänge zwischen Observablenwerten vorschreiben, kann die EQT — auch bei ${}^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0$ — über den Wert ${}^0Q(x)$ noch verfügen. Allerdings zeigt Satz 1, daß die EQT die Observablenrelation ${}^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0 \Rightarrow {}^0Q(x) = 0$ nicht für alle Mikrozustände und alle entsprechenden Tripel von Zustandseigenschaften *per definitionem* einführen kann. Auch bei Vorgabe von ${}^0(P_1 + P_2)(x) = 0$ muß der Wert ${}^0Q(x)$ noch von weiteren Variablen abhängen. Dafür kommt aber nach den Vorstellungen der EQT nur eine über die Operatordarstellung hinausgehende Charakterisierung der Maßanordnung in Frage. Eine solche Charakterisierung ist nun in der Quantentheorie bereits bekannt: Bei einer idealen Messung der Observablen $\boldsymbol{A}$ ist der präparierte Zustand im allgemeinen durch Angabe des Meßresultats $\boldsymbol{A} = a_k$ (und eventuell des Makrozustands vor der Messung) noch nicht vollständig bestimmt, sondern hängt noch vom *Separationsverhalten*[18] des Instruments ab. Und wie die folgende Diskussion des Separationsverhaltens von Orts messungen zeigt, eignet sich das Separationsverhalten eines Instruments auch formal hervorragend zur genaueren Charakterisierung der dem Instrument entsprechenden Observablen.

Zerstören die Ortsmeßinstrumente für $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{P}_2$ bei ihrer Wechselwirkung mit dem Teilchen die Kohärenz zwischen den linearen Teilräumen $R_i^\nu$ des Hilbert-Raumes, die den Zustandseigenschaften $\boldsymbol{R}_i^\nu$: = „Das Teilchen wird im Raumelement $\mathscr{R}_i^\nu$ festgestellt“ entsprechen, so präpariert eine $\boldsymbol{P}_1$-Messung mit positivem Ausgang den Quantenzustand $\mathbf{V}_\nu$ (Teilchen in $\mathscr{R}_1^\nu$), auch wenn das Instrument nur das Ergebnis „Teilchen in $\mathscr{P}_1$“ anzeigt. Ergibt nun eine gemeinsame Messung von $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{P}_2$ durch Instrumente mit $R_i$-Separation das Resultat

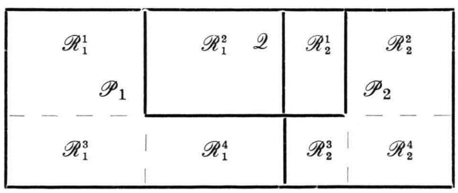


Fig. 1. Die $\boldsymbol{P}_i$-Instrumente und das $\boldsymbol{Q}$-Instrument haben das gleiche (gestrichelte) Separationsverhalten.

[16] Beziehen sich Zustandseigenschaft und Projektionsoperator auf das gleiche Raumelement, so bezeichnen wir die drei korrespondierenden Begriffe mit dem gleichen Buchstaben aus verschiedenen Schriften.

[17] Die Formulierung „Das Objekt ... wird festgestellt“, erweckt den Eindruck, als seien die Observablen der EQT doch keine von jeder Messung unabhängigen „Eigenschaften“ des Objekts. Das stimmt nur, solange der anschauliche „Ort“ der klassischen Physik als selbstverständliche Eigenschaft mikroskopischer Teilchen angesehen wird. Die EQT macht diese Voraussetzung nicht, sondern sie betrachtet nur solche Größen als Eigenschaften eines Objekts, die sich ideal messen lassen, und das sind im vorliegenden Fall gerade die oben beschriebenen „Ortsobservablen“.

[18] G. SÜSSMANN, Abh. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. Heft 88 [1958].

$^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0$, so liegt nach Voraussetzung der Makrozustand $\bigwedge\limits_{i=1,2}^{\nu} \neg$ (Teilchen in $\mathbf{R}_i^\nu$) vor; und damit gilt erst recht $\bigwedge\limits_{R_i^\nu \subset Q} \neg$ (Teilchen in $\mathbf{R}_i^\nu$), und ein genauerer Anzeigemechanismus der $\boldsymbol{P}_1$-$\boldsymbol{P}_2$-Meßanordnung würde auch $^0Q(x) = 0$ registrieren. Besitzt also das $\boldsymbol{Q}$-Instrument das gleiche Separationsverhalten wie die $\boldsymbol{P}_i$-Instrumente, so zwingen uns die Vorstellungen der EQT zu der Folgerung

$$^0P_1(x) = {}^0P_2(x) = 0 \Rightarrow {}^0Q(x) = 0\,. \tag{3.4}$$

Messen wir dagegen die Zustandseigenschaften $\boldsymbol{P}_i$ und $\boldsymbol{Q}$ mit *ideal konservativen* Instrumenten[18], so ist der Schluß (3.4) nicht nur nicht notwendig, sondern geradezu unplausibel; und das gilt für alle Fälle, in denen das Separationsverhalten der $\boldsymbol{P}_i$-Instrumente und des $\boldsymbol{Q}$-Instruments unverträglich ist. In solchen Fällen ist damit zu rechnen, daß die Funktionen $^0P_i(x)$ und $^0Q(x)$ unkorreliert sind.

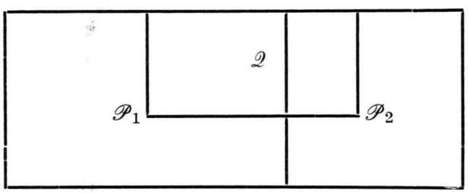


Fig. 2. Bei ideal konservativen Instrumenten ist das Separationsverhalten von $\boldsymbol{P}_i$-Instrumenten und $\boldsymbol{Q}$-Instrumenten unverträglich.

Diese anschaulichen Überlegungen lassen sich nun leicht verallgemeinern und formalisieren und führen uns zu folgenden Annahmen[19]: Eine Observable $\boldsymbol{A}$ ist durch Angabe des ihr von der Quantenmechanik zugeordenten Operators $A$ allein nicht eindeutig bestimmt, sondern muß durch zusätzliche Berücksichtigung der Art der Wechselwirkung des $\boldsymbol{A}$-Instruments mit dem Objekt (die sich in einem bestimmten Separationsverhalten auswirkt) noch näher charakterisiert werden. Folgerichtig betrachtet die EQT zwei Observable genau dann[19] als verträglich, wenn ihre Instrumente das gleiche Separationsverhalten besitzen. Dadurch gelten zwei Observable mit unterschiedlichem Separationsverhalten in der EQT selbst dann als unverträglich, wenn die Quantenmechanik beiden Observablen den selben Operator zuordnet. Eine analoge Änderung erfährt auch der Begriff des Makrozustands (oder Quantenzustands), da diese Zustände ja durch präparative Messungen definiert sind.

Offenbar lassen sich die neu konzipierten Observablen[20] und Makrozustände der EQT nicht mehr durch Operatoren darstellen wie in der Quantentheorie; sie erfordern eine neue mathematische Darstellung, die sich leicht aus ihrer oben entwickelten physikalischen Charakterisierung ergibt:

(**An 1#**) Jedem physikalischen System ist ein komplexer separabler Hilbert-Raum $\mathbf{H}$ zugeordnet und es existiert eine bijektive Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Menge aller Observablen des Systems auf die Menge aller Paare $A^\alpha$, bestehend aus dem selbstadjungierten Operator mit diskretem Spektrum $A = \sum\limits_{a \in \mathbf{a}} a\, P_a$, den auch die Quantenmechanik dieser Observablen zuordnet, und einer *A-feineren Zerlegung der Einheit* $\alpha$[21]. Die Abbildung $\boldsymbol{g}$ genügt dabei der Bedingung $\boldsymbol{g}(A) = A^\alpha \Rightarrow \boldsymbol{g}[f(\boldsymbol{A})] = f(A)^\alpha$ für alle stückweise stetigen Funktionen $f$.

Die in (An 1#) auftretende ZdE $\alpha$ charakterisiert das Separationsverhalten des $\boldsymbol{A}$-Instruments. Daher muß diese Separationszerlegung feiner sein als die spektrale Zerlegung.

In der EQT gibt es also zu jeder Observablen $\boldsymbol{A}$ genau zwei ausgezeichnete Darstellungen des zugehörigen Operators $A$, die Spektraldarstellung $A = \sum\limits_{a \in \mathbf{a}} a\, P_a$ und die Separationsdarstellung $A = \sum\limits_{i \in K_\alpha} q_i\, Q_i$; zwischen ihnen besteht folgender Zusammenhang: Jedem Projektionsoperator $P_a$ ist eine Indexmenge $I_a$ zugeordnet mit den Eigenschaften

$$(\forall\, a \neq b \in \mathbf{a})\; I_a \cap I_b = \emptyset\,, \qquad \bigcup_{a \in \mathbf{a}} I_a = K_\alpha\,,$$
$$(\forall\, i \in I_a)\; q_i = a\,, \qquad P_a = \sum_{i \in I_a} Q_i\,.$$

Diese Überlegungen sind natürlich nur für Observable mit entartetem Spektrum notwendig und nichttrivial. Zu einer

[19] Unser anschauliches Beispiel legt diese Annahmen nicht eindeutig fest. So könnte man die Gültigkeit von Gl. (3.4) auch noch für die Fälle fordern, in denen das Separationsverhalten des $\boldsymbol{Q}$-Instruments echt gröber ist als das Separationsverhalten der $\boldsymbol{P}_i$-Instrumente. Zwingend ist diese Forderung nicht, da sich Observable mit unterschiedlichem Separationsverhalten nicht gemeinsam messen lassen. Um den Aufbau der EQT möglichst einfach zu halten, wählen wir die obigen Annahmen.

[20] Natürlich sind die Begriffe Observable und Makrozustand hier zweideutig, da sie in Quantenmechanik und EQT verschiedene Bedeutung haben. Wo eine genauere Kennzeichnung fehlt, sind im folgenden stets EQT-Observable und EQT-Makrozustände gemeint.

[21] *Definition: Eine A-feinere Zerlegung der Einheit* $\alpha$ ist eine Menge $\{Q_i,\, i \in K_\alpha \subset N\}$ zueinander orthogonaler Projektionsoperatoren aus $\mathbf{H}$ mit den Eigenschaften

$$Q_i \cdot Q_j = \delta_{ij}\, Q_i\,,\; \sum_{i \in K_\alpha} Q_i = 1\,,\; (\forall\, i \in K_\alpha)\,(\exists\, a \in \mathbf{a})\; Q_i \leqq P_a\,.$$

„Zerlegung der Einheit" kürzen wir im folgenden mit ZdE ab, und die Menge aller ZdE aus $\mathbf{H}$ bezeichnen wir mit $\Lambda$.

Observablen $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{g}^{-1}(B^\beta)$ mit nichtentartetem Operator $\mathrm{B} = \sum_\nu b_\nu \,|\, b_\nu \rangle\langle b_\nu \,|$ gibt es keine $B$-feinere ZdE; folglich ist jede nichtentartete Observable bereits durch Angabe des zugeordneten Operators eindeutig bestimmt.

Aus (An 1#) und den oben entwickelten physikalischen Vorstellungen über die Verträglichkeit von Observablen erhalten wir folgende neue *Verträglichkeitsbedingung*[19]:

*Definition* (3.1). Zwei Observable heißen *EQT-verträglich*, wenn sie die gleiche Separationszerlegung besitzen.

Dieser Verträglichkeitsbegriff ist sehr eng. Die Verträglichkeit zweier Observablen bedeutet anschaulich, daß die zugehörigen Meßanordnungen (bis auf den Anzeigemechanismus) Instrumente gleichen Typs darstellen. Nach (An 2) folgt daraus, daß eine Meßanordnung mit dem Separationsverhalten $\alpha$ alle Observablen mit dem Index $\alpha$ gleichzeitig festgestellt (in dem Sinne, daß die Werte aller $\alpha$-Observablen eindeutig durch den makroskopischen Zustand des Instruments nach der Messung festgehalten sind), unabhängig davon, wie fein der Ablesemechanismus des Instruments ist oder auf welche $\alpha$-Observable die Skala des Instruments geeicht ist. Diese Überlegungen machen deutlich, daß die Werte EQT-verträglicher Observablen nicht in beliebiger Kombination, sondern nur in dem durch *Eichinvarianz* gegebenen Zusammenhang auftreten können. Daraus ergibt sich unmittelbar die gesuchte abgeschwächte Mindestforderung an die Observablenstruktur der Mikrozustände:

**(An 8#)** Die Observablenwertfunktionen der EQT-genügen der Beziehung

$$f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha$$

für alle $\alpha \in \Lambda$ und alle stückweise stetigen Funktionen $f$.

In Übereinstimmung mit den obigen Überlegungen ändert sich auch die mathematische Darstellung der Makrozustände:

**(An 5#)** Es existiert eine bijektive Abbildung **h** der Menge aller Makrozustände auf die Menge aller Paare $W^\varepsilon$, bestehend aus einem positiv-semidefiniten, normierten selbstadjungierten Operator $W$ aus **H**, den auch die Quantenmechanik diesem Makrozustand zuordnet, und einer $W$-feineren ZdE $\varepsilon$. Der Erwartungswert der Observablen $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}^{-1}(A^\alpha)$ im Makrozustand $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{h}^{-1}(W^\varepsilon)$ ist durch die Beziehung $E_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Sp}(AW)$ gegeben.

Die in (An 5#) auftretende ZdE $\varepsilon$ charakterisiert das Separationsverhalten der den Makrozustand $\boldsymbol{W}$ definierenden Präparation[22]. Die übrigen Annahmen der EQT bleiben im Wortlaut unverändert; die Worte Observable und Makrozustand erhalten lediglich eine neue Bedeutung gemäß (An 1#) und (An 5#).

Damit haben wir ein neues, abgeschwächtes System von Forderungen an die Ensemblekonstruktion der EQT gefunden, das die Mängel der DRQ ausschließt und dessen Verträglichkeit und Konsequenzen wir im weiteren Verlauf der Arbeit genauer untersuchen werden.

Insbesondere haben wir in (An 8#) eine abgeschwächte Bedingung für die Observablenstruktur der Mikrozustände gefunden, die den Bereich experimentell prüfbarer Aussagen nicht mehr überschreitet. Natürlich erhebt sich sofort die Frage, ob diese neue Bedingung auch hinreichend schwach ist, um den in Satz 1 aufgezeigten Widerspruch im neuen #-Annahmensystem zu vermeiden; nur dann war ja der Aufwand von Kapitel 3 sinnvoll. Das ist aber unmittelbar einsichtig, da die zum Beweis von Satz 1 notwendige Beziehung (3.2) nicht mehr gilt: Für den Fall $[Q, P_i] \neq 0$, $\mathrm{Sp}(Q) = \mathrm{Sp}(P_i) = 1$ $(i = 1,2)$ können die Observablen $\boldsymbol{P}_i$ und $\boldsymbol{Q}$ gar nicht den gleichen Separationsindex besitzen; folglich ist die Beziehung

$$(Q < P_1 + P_2) \wedge ({}^0P_1^\alpha(x) + {}^0P_2^\alpha(x) = 0) \Rightarrow {}^0Q^\beta(x) = 0$$

in keinem Fall für alle Mikrozustände erfüllt.

## 4. Nachweis der Verträglichkeit der modifizierten Annahmen

Für die Untersuchung des rein mathematischen Problems der Widerspruchsfreiheit der #-Annahmen empfiehlt es sich, von ihrem physikalischen Inhalt völlig abzusehen. Daher leiten wir aus den Prämissen (An 1#) bis (An 8#) zunächst ein formales Axiomensystem ab, das nur noch die mathematischen Forderungen an die EQT enthält.

*Axiomensystem der Ensemblestruktur der EQT*

**Axiom (1).** Zu jedem komplexen, separablen Hilbert-Raum **H** existiert ein Meßraum $(\Omega, \mathsf{L})$ mit folgenden Eigenschaften:

[22] In diesem Zusammenhang ist der Begriff Präparation so weit gefaßt, daß er auch eventuelle „Spuren" des Makrozustands vor der letzten Messung enthält.

a) Zu jedem Paar[23] $A^\alpha$, bestehend aus einem selbstadjungierten Operator $A$ aus $\mathbf{H}$ mit diskretem[24] Spektrum und einer $A$-feineren ZdE$\alpha$, existiert eine surjektive Abbildung ${}^0A^\alpha\colon \Omega \mapsto \mathbf{a}$ von $\Omega$ auf das Spektrum von $A$.

b) Die Abbildungen ${}^0A^\alpha$ sind $\mathsf{L}$-meßbar.

c) Für alle stückweise stetigen Funktionen $f$ auf $\mathcal{R}$ gilt

$$f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha.$$

d) Jedem Paar[23] $W^\varepsilon$, bestehend aus einem positiv semidefiniten, normierten, selbstadjungierten Operator $W$ aus $\mathbf{H}$ und einer $W$-feineren ZdE $\varepsilon$, ist eine Wahrscheinlichkeit $\mu_W^\varepsilon$ auf $(\Omega, \mathsf{L})$ zugeordnet.

e)[25] Zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in \Omega$ existiert wenigstens eine Observable $A^\alpha$ mit der Eigenschaft

$${}^0A^\alpha(x) \neq {}^0A^\alpha(y).$$

**Axiom** (2). Für alle Observablen und Makrozustände gilt die Beziehung

$$\int_\Omega {}^0A^\alpha \, \mathrm{d}\mu_W = \mathrm{Sp}(AW).$$

Um die Verträglichkeit dieses Axiomensystems nachzuweisen, müssen wir eine mathematische Struktur angeben, in der beide Axiome gelten. Zur Konstruktion eines möglichst einfachen Modells gehen wir von folgenden Überlegungen aus:

1. Alle Observablenwertfunktionen ${}^0A^\alpha$ sind Zufallsvariable auf den Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathsf{L}, \mu_W^\varepsilon)$.

2. Die Menge aller Observablen zerfällt in Äquivalenzklassen $\hat\alpha$ von EQT-verträglichen Observablen (d.h. von Observablen mit der gleichen ZdE$\alpha$).

3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die in der ZdE$\alpha$, $1 = \sum_{i\in K_\alpha} Q_i$, auftretende Indexmenge $K_\alpha$ die Form $K_\alpha = \{1, 2, \ldots, Z_\alpha \text{ oder } \infty\} \subset \mathcal{N}$ hat. Außerdem existiert zu jeder Observablen $A^\alpha$ genau eine Abbildung $\varphi_A : K_\alpha \mapsto \mathbf{a}$ mit der Eigenschaft

$$A = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_A(i)\, Q_i \tag{4.1}$$

Für den Zusammenhang dieser Separationsdarstellung mit der Spektraldarstellung $A = \sum_{a\in\mathbf{a}} a\, P_a$ gelten die Beziehungen

$$P_a = \sum_{P_a Q_j \neq 0} Q_j, \qquad a = \varphi_A(i) \text{ für alle } i \in K_\alpha \text{ mit } Q_i\, P_a \neq 0. \tag{4.2}$$

4. Die Axiome (1) und (2) enthalten keine Beziehungen zwischen Observablenfunktionen mit verschiedenen ZdE. Daher können wir der Einfachheit halber zusätzlich voraussetzen, daß $n$ Zufallsvariable ${}^0A_1^{\alpha_1}, \ldots, {}^0A_n^{\alpha_n}$ insgesamt stochastisch unabhängig sind, wenn alle Indizes $\alpha_i$ verschieden sind.

Diese Feststellungen ermöglichen nun die Konstruktion eines elementaren Modells für die Axiome (1) und (2). *Im ersten Schritt* ordnen wir jeder Klasse $\hat\alpha$ von EQT-verträglichen Observablen den Meßraum $(K_\alpha, \mathsf{P}(K_\alpha))$ zu, wobei $\mathsf{P}(K_\alpha)$ die Potenzmenge von $K_\alpha$ bedeutet. Nach 3. läßt sich der Operator der Observablen $A^\alpha \in \hat\alpha$ in der Form

$$A = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_A(i)\, Q_i \tag{4.1}$$

darstellen, und die Zuordnung $A \leftrightarrow \varphi_A$ ist eineindeutig. Stehen zwei Observable $A^\alpha$ und $B^\alpha$ aus $\hat\alpha$ in der Beziehung $B = f(A)$, so folgt aus (4.1) und (4.2)

$$B = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_B(i)\, Q_i = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_{f(A)}(i)\, Q_i,$$

$$B = f(A) = \sum_{i\in K_\alpha} f[\varphi_A(i)]\, Q_i$$

und aus der Eineindeutigkeit der Zuordnung $B \leftrightarrow \varphi_B$ ergibt sich schließlich

$$\varphi_{f(A)} = f(\varphi_A). \tag{4.3}$$

Jedem Makrozustand $W^\varepsilon$ ordnen wir die Funktion

$$\bar{m}_W^{\varepsilon,\alpha}(i) := \mathrm{Sp}(W Q_i)$$

auf $K_\alpha$ zu. $\bar{m}_W^{\varepsilon,\alpha}$ ist eine reelle, nichtnegative Funktion auf $K_\alpha$ mit der Eigenschaft $\sum_{i\in K_\alpha} \bar{m}_W^{\varepsilon,\alpha}(i) = 1$. Da die Elemente von $K_\alpha$ gerade die Atome der $\sigma$-Algebra $\mathsf{P}(K_\alpha)$ darstellen, läßt sich $\bar{m}_W^{\varepsilon,\alpha}$ auf genau eine Weise zu einer Wahrscheinlichkeit $m_W^{\varepsilon,\alpha}$ auf

[23] Im folgenden bezeichnen wir aus mnemotechnischen Gründen die Paare $A^\alpha$ aus (a) als Observable und die Paare $W^\varepsilon$ aus (d) als Makrozustände. Diese Bezeichnungen haben im Rahmen dieses Axiomensystems keine physikalische Bedeutung, sondern sind reine Nominaldefinitionen.

[24] Eine Untersuchung des Axiomensystems ohne Beschränkung auf Operatoren mit diskretem Spektrum findet sich in [1].

[25] Axiom (1e) besagt in physikalischer Deutung, daß kein Mikrozustand durch mehr als einen Punkt des Zustandsraums dargestellt wird. Dieses Axiom ist nicht in (An 1#) bis (An 8#) enthalten; wir setzen es trotzdem voraus, da es (durch Identifizierung aller Punkte, die den gleichen Mikrozustand darstellen) in jedem Modell nachträglich erfüllt werden kann.

$(K_\alpha, \mathsf{P}(K_\alpha))$ erweitern. Trivialerweise stellen die Funktionen $\varphi_A$ dann Zufallsvariable auf den Wahrscheinlichkeitsräumen $(K_\alpha, \mathsf{P}(K_\alpha), m_W^{\varepsilon,\alpha})$ dar. Unter Berücksichtigung der Gln. (4.2) und (4.4) erhalten wir schließlich

$$\int_{K_\alpha} \varphi_A \, dm_W^{\varepsilon,\alpha} = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_A(i)\, \bar{m}_W^{\varepsilon,\alpha}(i) = \sum_{i\in K_\alpha} \varphi_A(i) \operatorname{Sp}(W Q_i)$$
$$= \sum_{a\in \mathbf{a}} \sum_{i\in\varphi_A^{-1}(a)} \varphi_A(i) \operatorname{Sp}(W Q_i) = \sum_{a\in\mathbf{a}} a \sum_{i\in\varphi_A^{-1}(a)} \operatorname{Sp}(W Q_i)$$
$$= \sum_{a\in\mathbf{a}} a \operatorname{Sp}(W P_a) = \operatorname{Sp}(W A).$$

Im ersten Schritt haben wir also zu jeder Klasse $\hat{\alpha}$ ein Modell konstruiert, in dem — unter Beschränkung auf Observable aus $\hat{\alpha}$ — beide Axiome erfüllt sind.

*Im zweiten Schritt* verwenden wir nun die Zusatzannahme 4. und konstruieren die gesuchten Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathsf{L}, \mu_W^\varepsilon)$ einfach als Maßraum-Produkte:

$$(\Omega, \mathsf{L}, \mu_W^\varepsilon) := \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} (K_\alpha, \mathsf{P}(K_\alpha), m_W^{\varepsilon,\alpha})$$
$$= (\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathsf{P}(K_\alpha), \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} m_W^{\varepsilon,\alpha}). \tag{4.6}$$

Der Raum $\Omega$ besteht gerade aus der Menge aller Abbildungen $x: \Lambda \mapsto \mathcal{N}$, die der Nebenbedingung $x(\alpha) \in K_\alpha$ genügen. Auf $\Omega$ definieren wir die Observablenwertfunktionen ${}^0A^\alpha$ als eindimensionale Zylinderfunktionen

$${}^0A^\alpha := \varphi_A[x(\alpha)]. \tag{4.7}$$

Diese Zylinderfunktionen sind trivialerweise $\mathsf{L}$-meßbar und bilden wegen (4.2) und (4.7) ganz $\Omega$ eindeutig auf das ganze Spektrum des jeweiligen Operators ab. Aus den Beziehungen (4.3) und (4.4) ergeben sich sofort die analogen Beziehungen

$$f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha$$

und

$$E_W^\varepsilon(A^\alpha) := \int_\Omega {}^0A^\alpha \, d\mu_W^\varepsilon = \int_{K_\alpha} \varphi_A \, dm_W^{\varepsilon,\alpha} = \operatorname{Sp}(WA). \tag{4.8}$$

Sind schließlich $x$ und $y$ zwei verschiedene Punkte aus $\Omega$ (i.e. zwei verschiedene Abbildungen $\Lambda \mapsto \mathcal{N}$ mit $x(\gamma) \in K_\gamma$), so existiert mindestens ein Element $\alpha \in \Lambda$, $1 = \sum_{k\in K_\alpha} R_k$, mit der Eigenschaft $i = x(\alpha) \neq y(\alpha) = j$ $(i, j \in K_\alpha)$, und daraus ergibt sich

$${}^0R_i^\alpha(x) = \varphi_{R_i}[x(\alpha)] = \delta_{ix(\alpha)} = \delta_{ii} = 1,$$
$${}^0R_i^\alpha(y) = \varphi_{R_i}[y(\alpha)] = \delta_{iy(\alpha)} = \delta_{ij} = 0.$$

Damit ist auch Axiom (1e) erfüllt und wir erhalten

**Satz 2**: Die Axiome (1) und (2) sind verträglich; insbesondere gelten sie in dem oben konstruierten Modell des Meßraums $(\Omega, \mathsf{L})$ mit den Zufallsvariablen ${}^0A^\alpha$ und den Wahrscheinlichkeiten $\mu_W^\varepsilon$.

Interpretiert man die Elemente $x$ von $\Omega$ als Mikrozustände mit den Observablenwerten ${}^0A^\alpha(x)$ und das Maß $\mu_W^\varepsilon$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Mikrozustände des $W^\varepsilon$-Ensembles, so ergibt sich aus jedem die Axiome (1) und (2) realisierenden Modell eine Ensembletheorie, in der die Annahmen (An $1^\#$) bis (An $8^\#$) erfüllt sind. Daraus erhalten wir das

**Korrolar**: Die Annahmen (An $1^\#$) bis (An $8^\#$) sind verträglich; insbesondere gelten sie in der Ensembletheorie, die sich durch geeignete physikalische Interpretation aus dem oben konstruierten Modell ableiten läßt.

Damit haben wir gezeigt, daß sich für jeden Zeitpunkt eine „DRQ-ähnliche" Theorie verborgener Parameter konstruieren läßt, in der die Mängel der DRQ vermieden sind.

## Anhang: Beweis von Lemma (2.1)

Wir setzen zunächst die Beziehung

$$f({}^0A) = {}^0f(A) \tag{1}$$

für alle stückweise stetigen Funktionen $f$ voraus. Für einen Operator mit der Spektraldarstellung $A = \sum_{a\in\mathbf{a}} a\, P_a$ folgt aus (An 3)

$${}^0A = \sum_{a\in\mathbf{a}} a \operatorname{Ch}\{x \mid {}^0A(x) = a\} \tag{2}$$

und

$$\operatorname{Ch}\{{}^0A = a\} \cdot \operatorname{Ch}\{{}^0A = a'\} = \delta_{aa'} \operatorname{Ch}\{{}^0A = a\}$$
$$\sum_{a\in\mathbf{a}} \operatorname{Ch}\{{}^0A = a\} = 1. \tag{3}$$

Für eine beliebige, stückweise stetige Funktion $f$ gilt

$$B = f(A) = \sum_{a\in\mathbf{a}} f(a)\, P_a = \sum_{b\in\operatorname{Spt}(B)} b \sum_{\substack{a\in\mathbf{a}\\ f(a)=b}} P_a =: \sum_{b\in\mathbf{b}} b\, Q_b \tag{4}$$

und aus (An 3) folgt

$${}^0B = {}^0f(A)$$
$$= \sum_{b\in\mathbf{b}} b \operatorname{Ch}\{{}^0B = b\} = \sum_{b\in\mathbf{b}} b \operatorname{Ch}\{{}^0f(A) = b\}. \tag{5}$$

Betrachten wir insbesondere die Funktionen $g_\tau(t) := \delta_{\tau t}$, so erhalten wir für alle $a \in \mathbf{a}$

$$g_a(A) = \sum_{c\in\mathbf{a}} g_a(c)\, P_c = P_a \text{ und damit } {}^0g_a(A) = {}^0P_a\,. \tag{6}$$

Andererseits folgt aus (2)

$$g_a({}^0A) = \sum_{c\in\mathbf{a}} g_a(c)\,\mathrm{Ch}\,\{{}^0A = c\} = \mathrm{Ch}\,\{{}^0A = a\}. \tag{7}$$

Aus (1), (6) und (7) ergibt sich schließlich

$$\mathrm{Ch}\,\{{}^0A = a\} = {}^0P_a \tag{8}$$

und damit

$${}^0A = \sum_{a\in\mathbf{a}} a\,{}^0P_a\,.$$

Setzen wir umgekehrt neben (An 3) die Beziehung (2.2) für alle selbstadjungierten Operatoren mit diskretem Spektrum voraus, so sind den Operatoren

$$C = \gamma_1 \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a + \gamma_2\,(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)$$
$$D = \sum_{a\in\mathbf{a}'} \delta_a\,P_a + \beta\,(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)\,, \qquad \varnothing \subset \mathbf{a}' \subset \mathbf{a}\,,$$

deren Eigenwerte wir als von null und voneinander verschieden voraussetzen, folgende Observablenwertfunktionen zugeordnet:

$${}^0C = \gamma_1\,{}^0(\sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a) + \gamma_2\,{}^0(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)\,,$$
$${}^0D = \sum_{a\in\mathbf{a}'} \delta_a\,{}^0P_a + \beta\,{}^0(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)\,. \tag{9}$$

Aus (3) und (9) ergibt sich

$$1 = {}^0(\sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a) + {}^0(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)$$
$$= \sum_{a\in\mathbf{a}'} {}^0P_a + {}^0(1 - \sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a)$$

und daraus folgt

$${}^0(\sum_{a\in\mathbf{a}'} P_a) = \sum_{a\in\mathbf{a}'} {}^0P_a\,. \tag{10}$$

Ist nun $\mathrm{B} = f(A)$, so ergibt sich aus (2.2) und (4)

$${}^0B = {}^0f(A) = \sum_{b\in\mathbf{b}} b\,{}^0Q_b = \sum_{b\in\mathbf{b}} b\,{}^0(\sum_{\substack{a\in\mathbf{a}\\ f(a)=\mathbf{b}}} P_a)\,. \tag{11}$$

Andererseits folgt aus (2.2)

$$f({}^0A) = \sum_{a\in\mathbf{a}} f(a)\,{}^0P_a = \sum_{b\in\mathbf{b}} b \sum_{\substack{a\in\mathbf{a}\\ f(a)=\mathbf{b}}} {}^0P_a\,. \tag{12}$$

Die Kombination der Gln. (10), (11) und (12) ergibt schließlich

$${}^0f(A) = f({}^0A)\,.$$

Die Beziehungen (2.3) und (2.7) haben wir bereits mit den Gln. (3) und (8) bewiesen. Gleichung (2.5) ergibt sich unmittelbar aus den Gln. (2.2), (3) und (8). Aus $[A,B] = 0$ folgt bekanntlich die Existenz eines Operators $C = \sum_{c\in\mathbf{c}} c\,Q_c$ mit den Eigenschaften

$$A = u(C) = \sum_{c\in\mathbf{c}} u(c)\,Q_c = \sum_{a\in\mathbf{a}} a \sum_{\substack{c\in\mathbf{c}\\ u(c)=a}} Q_c\,,$$
$$B = v(C) = \sum_{c\in\mathbf{c}} v(c)\,Q_c = \sum_{b\in\mathbf{b}} b \sum_{\substack{c\in\mathbf{c}\\ v(c)=b}} Q_c\,. \tag{13}$$

Aus (10) und (13) folgt unmittelbar die Beziehung (2.4). Entsprechend ergibt sich aus $R \leq S$ die Existenz eines Operators $D = \sum_{d\in\mathbf{d}} \mathrm{d}\,L_\mu$ mit den Eigenschaften $R = p(D)$, $S = q(D)$ und

$$(\forall\, d \in \mathbf{d})\; p(d) \leq q(d)\,. \tag{14}$$

Aus (2.2) und (14) erhalten wir schließlich die Beziehung (2.6).

Herrn Prof. Dr. G. Süssmann danke ich für sein lebhaftes Interesse an dieser Arbeit und für viele wertvolle Diskussionen. Die Arbeit wurde in dankenswerter Weise vom Commissariat à l'Energie Atomique unterstützt.